Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume

MATHEMATIK VERBINDET

Mathe Nacht

1. Aufgabe:

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Berechne die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume der Matrizen A, A^2 und A^{-1}. Berechne weiter die Spuren und die Determinanten der Matrizen A, und A^2 mit Hilfe der Eigenwerte.

2. Aufgabe:

Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

3. Aufgabe:

Wahr oder falsch?

1. Falls eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ den Eigenwert $\lambda = 0$ hat, so ist $x \mapsto Ax$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ injektiv.
2. Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind immer linear unabhängig.
3. Die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und A^T sind identisch.
4. Falls eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ den Eigenwert $\lambda = 0$ hat, so ist $\det A = 0$.
5. Falls eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau n unterschiedliche Eigenwerte hat, so ist A diagonalisierbar.
6. Sind λ_1 und λ_2 Eigenwerte von A mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so gilt $\mathrm{Eig}(\lambda_1, A) \cap \mathrm{Eig}(\lambda_2, A) = \{o\}$.
7. Gilt $\det A = 0$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A.
8. Falls eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau n unterschiedliche Eigenwerte hat, so ist $x \mapsto Ax$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ bijektiv.

4. Aufgabe:

Berechne die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Berechne darüber hinaus die Inverse Matrix A^{-1} und A^{1000}.

5. Aufgabe:

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und λ_1, λ_2 die Eigenwerte von A. Beweise die Formeln

$$a + d = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = ad - bc.$$

Bemerkung: Damit ist die Spur einer 2x2 Matrix gleich der Summe der Eigenwerte und die Determinante gleich dem Produkt der Eigenwerte.

6. Aufgabe:

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ habe die Eigenwerte 0,1 und 2. Bestimme:

1. den Rang von A,
2. die Determinante von $A^T * A$,
3. die Eigenwerte von A^T,
4. die Spur von A, A^T und $A + A^T$.

7. Aufgabe:

Bestimme $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ so, dass die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & d & e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

die Eigenwerte 4 und 7 für A sowie $1, 2$ und 3 für C haben.

Die symmetrische Gruppe und Determinanten

MATHEMATIK VERBINDET

Mathe Nacht

1. Aufgabe:

Gegeben seien $\sigma_1, \sigma_2 \in S_7$ durch

$$\sigma_1 = [1\ 2\ 5\ 4\ 7\ 3\ 6] \quad \sigma_2 = [2\ 1\ 7\ 4\ 6\ 3\ 5]$$

a) Wie viele Elemente enthält S_7? Antwort:

b) Gib $\sigma_1(2)$, $\sigma_2(3)$, $(\sigma_2 \circ \sigma_1)(5)$ sowie $(\sigma_1 \circ \sigma_2)(5)$ an.

c) Gib $\sigma_1 \circ \sigma_2$ und $\sigma_2 \circ \sigma_1$ an!

d) Gib das Inverse von σ_1 an!

e) Bestimme nachvollziehbar $\operatorname{sgn}(\sigma_1)$, $\operatorname{sgn}\ (\sigma_2)$ und $\operatorname{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2)$.

2. Aufgabe:

Laut Vorlesung lässt sich jede Permutation $\sigma \in S_n$ als Produkt von Transpositionen schreiben.

a) Schreibe $\sigma \in S_4$ gegeben durch $[2\ 4\ 3\ 1]$ als Produkt von Transpositionen!

b) Zeige: Es gilt $\operatorname{sgn} \sigma = 1$ genau dann, wenn σ das Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen ist.

3. Aufgabe:

Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen möglichst geschickt!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Aufgabe:

Es sei $A \in K^{n \times n}$ eine Dreiecksmatrix. Beweise mit dem Entwicklungssatz von Laplace, dass für die Determinante gilt:

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

5. Aufgabe:

Bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die die unten stehende Matrix $A \in \mathbb{R}^4$ invertierbar ist und bestimme in diesen Fällen die Inverse mit Hilfe von Minoren.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Aufgabe:

Bestimme die Lösungsmenge des folgenden Linearen Gleichungssystems mit der Cramer'schen Regel!

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$$

7. Aufgabe:

Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det A = 2021$. Welche Aussagen sind richtig?

☐ $r(A) = 0$

☐ Die Lösungsmenge des LGS $A \cdot x = o$ mit $x \in \mathbb{R}^3$ lautet $\{o\}$.

☐ Ist $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ein Endomorphismus mit der Darstellungsmatrix A, so ist f bijektiv.

☐ Die Matrix A ist invertierbar.

☐ Das Produkt von A und einer invertierbaren Matrix $B \in \mathbb{R}^3$ ist invertierbar.

(Charakteristische) Polynome

1. Aufgabe:

Bestimme für folgende Polynome $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ jeweils Polynome $S, R \in \mathbb{R}[X]$ mit $\deg(R) < \deg(Q)$, sodass gilt:

$$P = Q \cdot S + R.$$

(i) $P = X^3 - 3X^2 + 5$ und $Q = X^2 - 4X + 3$.

(ii) $P = 2X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 3$ und $Q = X^2 + X + 1$.

(iii) $P = 7X^5 - 21X^4 + 47X^3 - 3X + 4$ und $Q = X^3 - 3X^2$.

2. Aufgabe:

Wir betrachten das Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ gegeben durch

$$P = (-2\sqrt{2},\ 2(1+\sqrt{2}),\ -(2+\sqrt{2}),\ 1,\ 0,\ ,\ ...).$$

a) Welche Nullstellen hat P in $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$? Hinweis: $1 + i$ ist eine Nullstelle von P.

b) Ist P irreduzibel als Polynom in $\mathbb{R}[X]$ oder $\mathbb{C}[X]$?

c) Gib eine Zerlegung von P in irreduzible Polynome über $\mathbb{R}$ an. Ist diese eindeutig bestimmt? Falls nicht, gib eine weitere solche Zerlegung an.

3. Aufgabe:

Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und die Abbildung $f : V \to V$ gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a + 4b + 4c \\ 2b - c \\ b + 2c \end{pmatrix}.$$

Bestimme das charakteristische Polynom von f und entscheide, ob f triangulierbar ist.
Wie ändert sich dieses Ergebnis, falls man f als Endomorphismus des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^3$ auffasst?

4. Aufgabe:

Zeige, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

als Element von $\mathbb{F}_2^{2\times 2}$ nicht triangulierbar ist, aber als Element von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ schon.

Diagonalisierbarkeit

MATHEMATIK VERBINDET

Mathe Nacht

1. Aufgabe:

Es sei $f \in Hom(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ definiert durch die Bilder der Standardbasisvektoren

$$\begin{aligned}
f\left((1,0,0,0)^T\right) &= (2,0,0,0)^T \\
f\left((0,1,0,0)^T\right) &= (0,1,3,0)^T \\
f\left((0,0,1,0)^T\right) &= (0,0,0,5)^T \\
f\left((0,0,0,1)^T\right) &= (0,0,0,1)^T
\end{aligned}$$

Zeige:

a) f ist triangulierbar.

b) f ist weder injektiv, noch surjektiv.

c) f ist nicht diagonalisierbar.

2. Aufgabe:

Finde ein Beispiel für ...

a) einen Endomorphismus, der diagonalisierbar und bijektiv ist.

b) einen Automorphismus, der nicht diagonalisierbar ist.

c) eine Matrix mit den Eigenvektoren -3 und 4, die nicht diagonalisierbar ist.

d) eine Matrix mit den Eigenwerten -3 und 4, die diagonalisierbar ist.

e) einen diagonalisierbaren, nicht bijektiven Endomorphismus, der nur einen Eigenwert besitzt.

3. Aufgabe:

Seien $K = \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \frac{7}{3} & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Zeige, dass A ähnlich ist zu

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und beschreibe anschließend, wie sich A^{10} möglichst geschickt berechnen lässt.

4. Aufgabe:

Kreuze jeweils die richtigen Antworten an und begründe! (mehrfache richtige Antworten möglich)

a) Jede diagonalisierbare Matrix, die nicht 0 als Eigenwert hat, ist auch bijektiv.

☐ Ja

☐ Nein

b) Jeder diagonalisierbare Endomorphismus, der nicht 0 als Eigenwert hat, ist auch bijektiv.

☐ Ja

☐ Nein

c) Ein Endomorphismus f ist diagonalisierbar genau dann, wenn ...

☐ das charakteristische Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt und die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwertes mit der algebraischen Vielfachheit übereinstimmt.

☐ jede Darstellungsmatrix von f eine Diagonalmatrix ist.

☐ es eine Basis aus Eigenvektoren gibt.

☐ jeder Eigenwert von f die algebraische Vielfachheit 1 hat.

d) Ein Endomorphismus $f \in Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit der Darstellungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und dem charakteristischen Polynom $\chi_A(x) = (x-2)^2(x+1)$ erfüllt **sicher** die Eigenschaft:

☐ f ist triangulierbar.

☐ f hat die Eigenwerte 2 und -1

☐ f ist diagonalisierbar

☐ f hat genau zwei Eigenräume

☐ der Eigenraum von f zum Eigenwert -1 hat genau Dimension 1

☐ jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ ist ein Eigenvektor von f

5. Aufgabe:

Es sei $A := \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ a-2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die die Matrix A **sicher** diagonalisierbar ist.